

Variationsprobleme des achsial- und querbelastrten geraden Balkens

Schaefer, H.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 13, 1961,
S.182-192



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Variationsprobleme des achsial- und querbelasteten geraden Balkens*)

H. Schaefer, Braunschweig

(Eingegangen am 28. 9. 1961)

Summary: Treated is the bending and buckling of a straight bar. The variational principle of extremal potential energy is transformed into the canonical variational problem for displacements and internal forces. This is the starting-point to win different new variational problems. Several instances are quoted, e. g. the analogon to Castigliano's principle and a variational problem for the displacements which leads to an integral equation. Maximum and minimum properties are investigated. In the case of axial traction there is the possibility to set limits to the deflections.

Übersicht: In der Theorie 2. Ordnung der Balkenbiegung lassen sich, ausgehend vom Variationsproblem des Extremums der potentiellen Energie, über das kanonische Variationsproblem eine Reihe neuer Variationsprobleme formulieren, u. a. ein Analogon zum Satz von *Castigliano*. Im Falle axialen Zugs können die Querverschiebungen des Balkens eingegrenzt werden.

1. Einleitung

Ein die ganze Kontinuumsmechanik beherrschendes Variationsproblem ist dasjenige vom Minimum der potentiellen Energie, ein Variationsproblem (V. P.) für die Verschiebungen. Es ist bekannt, daß man im Falle *kleiner* Verschiebungen des elastischen Körpers durch eine Art Legendresche Transformation aus obigem V. P. ein V. P. für die Spannungen gewinnen kann, das nach Morera oder häufiger nach *Castigliano* benannt wird. Die mathematische Theorie solcher Transformationen ist von *K. Friedrichs* [1] untersucht worden.

In dieser Arbeit soll einmal an dem einfachsten Beispiele eines elastischen Körpers mit *großen* Verschiebungen, dem geraden Balken, dargelegt werden, welche Möglichkeiten die Variationsrechnung überhaupt bietet, um Variationsprobleme aufzustellen, sei es für die Verschiebungen oder die inneren Kräfte. Unser Leitfaden wird die Theorie der kanonischen Systeme sein, wie sie in der analytischen Mechanik entwickelt worden ist. Die beste Orientierung über solche Methoden bietet der Enzyklopädie-Artikel von *G. Prange* [2]. *Prange* selbst hat in seiner Habilitationsschrift [3] die Theorie der kanonischen Systeme auf das Fachwerk und den elastischen Körper angewendet und in einer besonderen Arbeit auf den Balken [4]. *Prange* zeigt die engen Analogien auf, die zwischen den Variationsproblemen der analytischen Mechanik und denen der Elastizitätstheorie bestehen. Neuerdings sind in Arbeiten von *W. Günther* [5], *H. Münz* [6] und *H. Schaefer* [7] diese Verfahren der Variationsrechnung für die Kreisringplatte, die achsensymmetrische Schale und für Eigenwertberechnungen nutzbar gemacht worden.

*) Ausführliche Fassung eines Vortrages an der Techn. Universität Istanbul im April 1955.

2. Das Variationsproblem vom Minimum der potentiellen Energie

Es gibt zahlreiche Fälle, in denen man schon bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zwischen äußeren und inneren Kräften die Durchbiegung $y(x)$ des Balkens berücksichtigen muß. Das Biegemoment $P \cdot y$ einer achsialen Kraft P kann von der Größenordnung des Momentes der Querbelastung $f(x)$ sein. Man spricht dann von Zug- oder Knickbiegung. Beispiele für solche achsiale Belastungen sind das Eigengewicht eines senkrecht stehenden Stabes oder die Fliehkräfte (Zentrifugalkräfte) des rotierenden Stabes. Zu den Querbelastungen sind auch die Trägheitskräfte des schwingenden Stabes zu rechnen.

Die Gleichgewichtsfigur des gebogenen Balkens ist dadurch ausgezeichnet, daß die potentielle Energie der inneren und äußeren Kräfte einen Extremwert annimmt; die Biegelinie ist Extremale eines Variationsproblems.

Nehmen wir an — wie in der technischen Biegelehre üblich — daß die Balkenmittellinie undeformierbar ist, so ist die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage (l = Länge des Balkens)

$$V[y] = \int_0^l \left(\frac{1}{2} E J y''^2 - \frac{1}{2} \lambda S y'^2 - f y \right) dx. \quad (2,1)$$

Die einzelnen Glieder haben folgende Bedeutung: $y(x)$ ist die wahre Durchbiegung, $E J(x)$ die Biegesteifigkeit, $\lambda S(x)$ die Längskraft, λ ein Parameter, $f(x)$ die Querbelastung je Längeneinheit. Das Nullniveau der potentiellen Energie soll der gestreckten Lage des Balkens entsprechen.

$$\frac{1}{2} \int_0^l E J y''^2 dx \quad (2,2)$$

ist die innere Energie, die Biegeenergie, oder die Formänderungsarbeit. Betrachten wir nun die Abb. 1. Bei der Verbiegung senkt sich das Gewicht

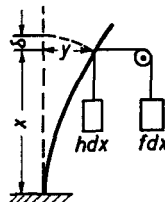


Abb. 1

$f dx$ um y , und der Verlust an potentieller Energie ist

$$\int_0^l f y dx \quad (2,3)$$

Um welchen Betrag senkt sich das Gewicht $h dx$? Es ist das Stück

$$\delta = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx - x \quad (2,4)$$

eine kleine Differenz von zwei großen Werten. Durch Reihenentwicklung der Wurzel bis zum quadratischen Glied wird

$$\delta = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx - x = \frac{1}{2} \int_0^x y'^2 dx \quad (2,5)$$

Die gesamte Längsbelastung erleidet also folgenden Verlust an potentieller Energie:

$$\int_0^l h(x) \left(\frac{1}{2} \int_0^x y'^2 dx \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\int_x^l h(\xi) d\xi \right) y'^2 dx. \quad (2,6)$$

$$\int_x^l h(\xi) d\xi = \lambda S(x) \quad (2,7)$$

ist die Längskraft im Querschnitt x .

Wir setzen nun voraus, daß $S(x)$ überall positiv ist. Dann bedeutet

$$\lambda > 0 \text{ Druck} \quad (2,8)$$

$$\lambda < 0 \text{ Zug.}$$

3. Stabilität der Gleichgewichtslage

Für eine von der wirklichen Gleichgewichtslage $y(x)$ abweichende

$$u(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x); \quad \eta(0) = \eta'(0) = 0; \quad (3,1)$$

wird die potentielle Energie nach (2,1)

$$\begin{aligned} V[u] &= V[y] + \varepsilon \int_0^l (E J y'' \eta'' - \lambda S y' \eta' - f \eta) dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^l (E J \eta''^2 - \lambda S \eta'^2) dx. \end{aligned} \quad (3,2)$$

Bei einem festgewählten $\eta(x)$ hängt $V[u]$ parabolisch von ε ab. Für $\varepsilon = 0$ soll aber V , wie es das Prinzip vom Minimum (besser Extremum) der potentiellen Energie verlangt, stationär sein. Der Faktor von ε muß also verschwinden. Er lautet, nach partieller Integration und Beachtung der Randbedingungen (3,1) für η

$$\begin{aligned} &\int_0^l \{ (E J y'')' + \lambda (S y')' - f \} \eta dx \\ &\quad + [E J y'' \eta']_{x=l} - [\{ (E J y'')' + \lambda S y' \} \eta]_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Weil (3,3) für jedes $\eta(x)$ gelten muß, schließt man in bekannter Weise, daß die wahre Biegelinie $y(x)$ der Differentialgleichung

$$(E J y'')' + \lambda (S y')' - f = 0 \quad (3,4)$$

und den statischen Randbedingungen

$$[E J y'']_{x=l} = 0; \quad [(E J y'')' + \lambda S y']_{x=l} = 0 \quad (3,4a)$$

genügt.

Mit Hilfe von (3,4) und (3,4a) gewinnt man für $V[y]$ in (2,1) die Darstellung

$$V[y] = -\frac{1}{2} \int_0^l f y dx \quad (3,5)$$

Das Vorzeichen des Faktors von ε^2 in (3,2) entscheidet darüber, ob $V[y]$ ein Maximum oder Minimum von $V[u]$ ist.

Wir schreiben diesen Faktor folgendermaßen:

$$\left(\int_0^l S \eta'^2 dx \right) \left(\frac{\int_0^l E J \eta''^2 dx}{\int_0^l S \eta'^2 dx} - \lambda \right) \quad (3,6)$$

Da der erste Faktor dieses Produktes immer positiv ist, kommt es auf den Wert des zweiten Faktors an. Er ist positiv für

$$\lambda < \left(\frac{\int_0^l E J \eta''^2 dx}{\int_0^l S \eta'^2 dx} \right)_{\min} = \lambda_k, \quad (3,7)$$

negativ für

$$\lambda > \lambda_k. \quad (3,8)$$

Selbstverständlich ist (3,6) immer positiv für $\lambda < 0$, also nach (2,8) für eine Zugbeanspruchung.

Das Minimum des Quotienten in (3,7) bezieht sich auf die Wahl von η , das, genau so wie u in (3,1), den geometrischen Randbedingungen zu genügen hat. (Bei fester Einspannung also $\eta(0) = \eta'(0) = 0$.) Bekanntlich haben wir in (3,7) den Rayleigh'schen Quotienten vor uns, und λ_k ist die niedrigste Knicklast des Balkens.

Aus diesen Überlegungen folgt nun, daß für

$$\lambda < \lambda_k: V[u] > -\frac{1}{2} \int_0^l f y dx \quad (3,9)$$

ist, d. h. aber, bei einer achsialen Zugkraft oder einer Druckkraft, die kleiner als die Knicklast ist, ist das Extremum von $V[u]$ ein Minimum; die Gleichgewichtslage ist stabil. Sie ist instabil für eine achsiale Druckkraft, die größer als die Knicklast ist.

4. Transformation des Variationsproblems auf kanonische Gestalt

Wir versuchen nun, Zusammenhänge mit Transformationen der analytischen Mechanik deutlich zu machen, indem wir die dort üblichen Bezeichnungen einführen. Wir setzen:

$$y = q_1; y' = q_2; q_1' - q_2 = 0 \quad (4,1)$$

und schreiben (2,1)

$$V_2 [q_1, q_2, p_1] = \int_0^l \left[\frac{1}{2} E J q_2'^2 - \frac{1}{2} \lambda S q_2^2 - f q_1 + p_1 (q_1' - q_2) \right] dx$$

$$= \text{Extrem.} \quad (4,2)$$

p_1 spielt hier die Rolle eines Lagrangeschen Faktors, der uns ermöglicht, in V_2 q_1 und q_2 unabhängig zu variieren.

Der Integrand von (4,2) sei mit $L(q_1, q_2, p_1)$ bezeichnet.

Wir bilden nun die „Impulse“

$$\frac{\partial L}{\partial q_1'} = p_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial q_2'} = E J q_2' = p_2 \quad (4,3)$$

und damit die Hamiltonsche Funktion

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 q_1' + p_2 q_2' - L(q_1, q_2, p_1). \quad (4,4)$$

Rechts ist q_2' durch p_2 nach (4,3) zu ersetzen; die beiden Glieder mit q_1' heben sich weg. Man erhält so

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 q_2 + f q_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_2^2}{E J} + \lambda S q_2^2 \right) \quad (4,5)$$

Ersetzt man jetzt das L in (4,2) durch H nach (4,4), so entsteht das *Kanonische Variationsproblem*

$$V_3 [q_1, q_2, p_1, p_2] = \int_0^l \left(p_1 \frac{d q_1}{d x} + p_2 \frac{d q_2}{d x} - H \right) dx = \text{Extrem.} \quad (4,6)$$

Hierin dürfen alle 4 Größen q_1, q_2, p_1 und p_2 unabhängig voneinander variiert werden; q_1 und q_2 haben jedoch den geometrischen Randbedingungen zu genügen. Die Eulerschen Gleichungen von (4,6) lauten:

$$\frac{d q_1}{d x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_2 \quad (4,7a) \quad \frac{d p_1}{d x} = - \frac{\partial H}{\partial q_1} = - f \quad (4,7b)$$

$$\frac{d q_2}{d x} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{E J} \quad \frac{d p_2}{d x} = - \frac{\partial H}{\partial q_2} = - p_1 - \lambda S q_2$$

Es sind dies die *kanonischen Gleichungen*. Ihre Deutung ist sehr einfach. (4,7a) enthalten die Definitionen (4,1) und (4,3). Offenbar ist p_2 das Biegemoment. Aus (4,7b) ersieht man, daß p_1 die Querkraft des Balkens ist, die hier, da wir ja die Schubverformung vernachlässigt haben, zu einem Lagrangeschen Faktor entartet ist. Die zweite Gleichung (4,7b) ist nichts anderes als die Gleichgewichtsbedingung der Momente am Balkenelement. Man vergleiche Abb. 2, in der man abliest:

$$d p_2 + p_1 dx + \lambda S q_2 dx = 0. \quad (4,8)$$

5. Neue Variationsprobleme

Unser kanonisches Variationsproblem (4,6) ist sehr „aufgelockert“. Folgende Einschränkungen der Variationsmöglichkeiten unter den Funktionen q_1, q_2, p_1, p_2 liegen nahe:

a) in (4,6) nimmt man (4,7a) als bereits erfüllt an. Im Integranden von V_3 wird alles durch q_1 ausgedrückt mit Hilfe von (4,7a). So kommt man zurück auf unser ursprüngliches V , dem V. P. vom Minimum der potentiellen Energie. Dieses erstrebt die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (4,7 b).

b) Man nimmt in (4,6) die Gleichgewichtsbedingungen (4,7b) als bereits erfüllt an. Diesen Gedanken wollen wir weiter verfolgen.

Durch partielle Integration bei Beachtung sämtlicher Randbedingungen formen wir V_3 um in

$$V_4 = \int_0^l (q_1 p_1' + q_2 p_2' + H) dx = \text{Extrem.} \quad (5,1)$$

Den Integranden formen wir mit Hilfe von (4,7b) weiter um und gewinnen das neue Variationsproblem

$$V_5 = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{p_2^2}{EJ} - \lambda S q_2^2 \right) dx \rightarrow \text{Extrem.} = + \frac{1}{2} \int_0^l f y dx \quad (5,2a)$$

mit der Nebenbedingung

$$p_2'' = f - \lambda (S q_2)', \quad (5,2b)$$

der Gleichgewichtsbedingung. Wegen der partiellen Integration von V_3 nach V_4 müssen, wie man sich überzeugt, von jetzt ab den p_1 und p_2 die statischen Randbedingungen (3,4a) auferlegt werden, d. h. $p_2(l) = p_1(l) = 0$.

Deshalb hat auch p_2 in (5,2) den Gleichgewichtsbedingungen am Rande zu genügen, q_2 dagegen darf völlig willkürlich sein. Dieses Variationsproblem erstrebt die Erfüllung der Gleichungen (4,7a). Es entartet im Falle $\lambda = 0$ zu dem bekannten Satz vom „Minimum der Formänderungsarbeit“ nach *Castigliano*, der nur dann sinnvoll ist, wenn die bei der Integration der Nebenbedingung (5,2b) anfallenden Konstanten nicht allein aus den Randbedingungen für p_2 bestimmbar sind. (5,2a) erstrebt dann die Erfüllung der geometrischen Randbedingungen und legt damit auch diejenigen Integrationskonstanten fest, die allein aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht bestimmbar sind. Dieser letzte Satz gilt natürlich auch für $\lambda \neq 0$.

Allgemein läßt (5,2) folgende Auffassungen zu:

- ba) mit (5,2b) eliminiert man im Integranden von (5,2a) q_2 und erhält ein Variationsproblem für Biegemoment p_2 und Querkraft p_1 .
- bb) in (5,2b) wird p_2 durch Integration als Funktional von q_2 ausgedrückt und in (5,2a) eingesetzt. Es entsteht ein Variationsproblem für q_2 .

Wir verfolgen den Fall bb.

Die Integration von (5,2b) liefert

$$p_2(x) = \int_0^l \mathfrak{M}(x, \xi) f(\xi) d\xi - \lambda \int_0^l \frac{\partial \mathfrak{M}(x, \xi)}{\partial \xi} S(\xi) q_2(\xi) d\xi \quad (5,3)$$

$\mathfrak{M}(x, \xi)$ ist das Biegemoment an der Stelle x infolge der Last „1“ in ξ . Nach Abb. 2 bildet λS ein Kräftepaar vom Momente $-\lambda S q_2 dx$. Abb. 3 veran-

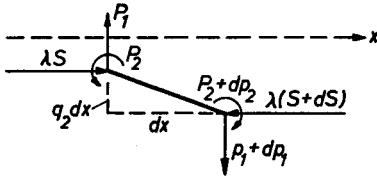


Abb. 2

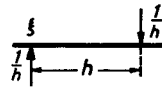


Abb. 3

schaulich einen Grenzübergang. An den Stellen ξ und $\xi + h$ des Balkens greifen zwei Einzelkräfte $\frac{1}{h}$ an, die ein Kräftepaar vom Momente „1“ bilden.

An der Stelle x rufen sie das Biegemoment

$$\frac{1}{h} \mathfrak{M}(x, \xi + h) - \frac{1}{h} \mathfrak{M}(x, \xi)$$

hervor, das für $h \rightarrow 0$ in $\frac{\partial \mathfrak{M}(x, \xi)}{\partial \xi}$ übergeht.

(5,3) setzen wir in den Integranden von (5,2a) ein. Dazu ist $\int_0^l \frac{p_2(x)^2}{EJ(x)} dx$ zu bilden. Wie man dies zu machen hat, zeigen wir am ersten Glied in (5,3).

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{1}{EJ(x)} \left(\int_0^l \mathfrak{M}(x, r) f(r) dr \right) \left(\int_0^l \mathfrak{M}(x, t) f(t) dt \right) dx = \\ &= \int_0^l \int_0^l \left(\int_0^l \frac{\mathfrak{M}(x, r) \mathfrak{M}(x, t)}{EJ(x)} dx \right) f(r) f(t) dr dt \end{aligned} \quad (5,4)$$

$$K(r, t) = K(t, r) = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}(x, r) \mathfrak{M}(x, t)}{EJ(x)} dx \quad (5,5)$$

ist bekanntlich die Durchbiegung an der Stelle r des in t mit der Kraft „1“ belasteten Balkens (ohne Anwesenheit von Längskraft!).

So entsteht letzten Endes unser Variationsproblem

$$\begin{aligned}
V_6[q_2] &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l K(r, t) f(r) f(t) dr dt \\
&\quad - \lambda \int_0^l \int_0^l \frac{\partial K(r, t)}{\partial t} f(r) S(t) q_2(t) dr dt \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial r \partial t} S(r) q_2(r) S(t) q_2(t) dr dt \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \int_0^l S(x) q_2(x)^2 dx \rightarrow \text{Extrem.} = + \frac{1}{2} \int_0^l f y dx
\end{aligned} \tag{5,6}$$

Nun zu den Extremumseigenschaften dieses etwas sonderbar anmutenden Variationsproblems!

Die variierte Steigung der Biegelinie sei

$$Q_2 = q_2 + \varepsilon \eta_2. \tag{5,7}$$

$$\begin{aligned}
V_6[Q_2] &= V_6[q_2] - \varepsilon \int_0^l \lambda E(t) S(t) \eta_2(t) dt + \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} (\lambda^2 F[\eta_2] - \lambda \int_0^l S \eta_2^2 dx)
\end{aligned} \tag{5,8}$$

mit den Abkürzungen

$$E(t) = q_2(t) - \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial r \partial t} S(r) q_2(r) dr + \int_0^l \frac{\partial K(r, t)}{\partial t} f(r) dr \tag{5,9}$$

und

$$F[\eta_2] = \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial r \partial t} S(r) \eta_2(r) S(t) \eta_2(t) dr dt. \tag{5,10}$$

Die Forderung, daß V_6 stationär sein soll, führt auf

$$E(t) = 0, \tag{5,11}$$

eine Integralgleichung für q_2 .

Den Faktor von ε^2 schreiben wir

$$\lambda F[\eta_2] \left\{ \lambda - \frac{\int_0^l S \eta_2^2 dx}{F[\eta_2]} \right\}. \tag{5,12}$$

Er ist negativ für

$$0 < \lambda < \left(\frac{\int_0^l S \eta_2^2 dx}{F [\eta_2]} \right)_{\min} = \lambda_k. \quad (5,13)$$

Das Minimum des „Hilbertschen Quotienten“ bezieht sich auf η_2 , das hier keinen Randbedingungen zu genügen braucht. Die Theorie der linearen Integralgleichungen lehrt, daß dieses Minimum gerade die kleinste Knicklast λ_k ist.

Für Druckkräfte unterhalb der Knicklast $\lambda_k S$ ist also das Extremum von V_6 ein Maximum.

Bei achsialem Zug ($\lambda < 0$) ist (5,12) positiv, das Extremum von V_6 demnach ein Minimum.

Werte $\lambda > \lambda_k$ interessieren nicht.

6. Eingrenzung der Extremwerte und der Durchbiegung

Bei Zug gilt:

$$V_6 [Q_2] \geq V_6 [q_2] = + \frac{1}{2} \int_0^l f y dx \quad (6,1)$$

und nach (3,9)

$$V [u] \geq V [y] = - \frac{1}{2} \int_0^l f y dx. \quad (6,2)$$

Demnach liegt das Extremum $\frac{1}{2} \int_0^l f y dx$ zwischen den Werten

$$- V [u] \leq \frac{1}{2} \int_0^l f y dx \leq V_6 [Q_2] \quad (6,3)$$

Bei Druckkräften unterhalb der Knicklast existiert eine solche Eingrenzung durch V und V_6 leider nicht.

Die Eingrenzung (6,3) ermöglicht es, die Durchbiegung des Balkens an jeder beliebigen Stelle einzugrenzen. Dies soll hier jedoch nicht unsere Aufgabe sein, und wir verweisen auf die bekannten Arbeiten von Trefftz, Weber, Prager und Synge [8].

Die hier abgeleiteten Variationsprobleme haben praktische Bedeutung für Näherungsrechnungen.

Selbstverständlich wird man dazu niemals V_6 in (5,6) benutzen, sondern man wird auf „Castigliano“ in (5,2a) und (5,2b) zurückgreifen. Für q_2 wird man dort einen Ritzschen Ansatz machen:

$$Q_2 (x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i (x) \quad (6,4)$$

und daraus durch Integration von (5,2b) p_2 berechnen. Die auftretenden Integrationskonstanten — soweit sie nicht schon durch Gleichgewichtsbedingungen festgelegt sind — und die Freiwerte a_i in (6,4) werden dann aus den linearen Gleichungen, die sich aus den Extremumsforderungen (5,2a) ergeben, berechnet. Es zeigt sich — was nicht überraschend ist — daß man mit V_5 genauere Näherungswerte erhält als mit V , dem V. P. vom Minimum der potentiellen Energie, sofern man beide Male dieselben Koordinatenfunktionen $g_i(x)$ in (6,4) benutzt.

7. Ein Beispiel

Anschließend betrachten wir noch ein einfaches Beispiel. (Abb. 4).

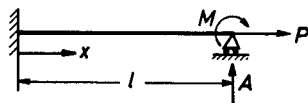


Abb. 4

Der Balken sei am rechten Ende durch ein Einzelmoment M und eine Zugkraft P belastet, links ist er fest eingespannt, rechts frei aufgelagert. Als Näherungsansatz für die Biegelinie nehmen wir die für $P = 0$ exakte Gleichung

$$u(x) = a \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (7,1)$$

Durch Differentiation gewinnt man $Q_2 = u'(x)$, was aber hier nicht erforderlich ist; auch nicht eine zweimalige Integration, um p_2 zu erhalten. Denn man erkennt anschaulich, daß das Biegemoment

$$p_2(x) = -A(l - x) + M + P u(x) \quad (7,2)$$

st. a in (7,1) und die Auflagerkraft A (Integrationskonstante!) in (7,2) berechnen sich dann aus

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0; \text{ bzw. } \frac{\partial V_5}{\partial A} = 0; \frac{\partial V_5}{\partial a} = 0. \quad (7,3)$$

Das Ergebnis dieser elementaren Rechnungen ist:

$$V[u] = -\frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{M^2}{EJ} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{30}} \quad (7,4)$$

$$V_5[Q_2] = +\frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{M^2}{EJ} \frac{1 - \frac{\lambda}{76,3}}{1 - \frac{\lambda}{21,5}} \quad (7,5)$$

λ hat hier eine etwas andere Bedeutung als oben, nämlich

$$\lambda = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad (7,6)$$

und bei Zugbelastung ist P negativ zu setzen. λ_k hat übrigens den exakten Wert (auf 2 Stellen genau)

$$\lambda_k = 20,16 \quad (7,7)$$

und die Ergebnisse (7,4) und (7,5), die natürlich auch für positive λ gelten, liefern für λ_k die Näherungen 30 bzw. 21,5.

Bei negativem λ (Zug) hat man für die Neigung der Biegelinien-Tangente im rechten Auflager die Eingrenzung

$$-V[u] < \frac{M}{2} y'(l) < V_5[Q_2]. \quad (7,8)$$

Literatur

- [1] *K. Friedrichs*: vgl. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 199.
- [2] *G. Prange*: Enzyklopädie der mathem. Wissensch., IV, 2; S. 505.
- [3] *G. Prange*: Das Extremum der Formänderungsarbeit, Habilitationsschrift Hannover 1916, unveröffentlicht.
- [4] *G. Prange*: Die Theorie des Balkens in der technischen Elastizitätslehre, Z. Arch. Ing.-Wesens 65, N. F. 24 (1919), S. 83—96, 121—150.
- [5] *W. Günther*: Die Biegung kreissymmetrischer Ringplatten veränderlicher Dicke als Problem der Variationsrechnung, Dissertation Braunschweig 1946.
Ein Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Berechnung der Beanspruchungsgrößen und der Durchbiegung einer kreissymmetrischen Ringplatte, Abh. Brschwg. Wiss. Ges. IV (1952).
- [6] *H. Münz*: Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 103—117, 255—270.
- [7] *H. Schaefer*: Über Anwendungen der Variationsrechnung auf technische Eigenwertprobleme, Abh. Brschwg. Wiss. Ges. IV, (1952).
- [8] *J. L. Synge*: The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge 1957.